IA DE LOUGA — **ANNEE SCOLAIRE : 2025-2026**
LYCEE FRANCO ARABE PUBLIC DE LOUGA — **PROF : M.DIALLO**
CLASSE : TS2A — **CELLULE MATHEMATIQUES**

DEVOIR SURVEILLE N°1 DU PREMIER SEMESTRE DE MATHEMATIQUES (3H)

EXERCICICE N°1 :($\mathbf{8}\boldsymbol{points}$)

1. a. Enoncer le théorème de la bijection. $(\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$
   b. Enoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis. $(\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$
   c. Soit g une bijection d'un intervalle $I\ vers\ \ un\ intervalle\ J,\ \ g^{-1}$ sa réciproque,$x_0 \in I\ et\ y_0 \in J$ tel que $y_0 = g(x_0)$.Determiner des conditions suffisantes pour que $g^{-1}\ soit$ dérivable en y_0 puis préciser $(g^{-1})'(y_0)$. $(\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$
2. Calculer les limites suivantes :($\mathbf{3} \times \mathbf{1}\boldsymbol{pt} = \mathbf{3}\boldsymbol{pts}$)

   $a).\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sin\left[\pi \frac{6-x}{3x-1}\right]$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$; c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$.

3. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur un intervalle à préciser.

   $a.)f(x) = \sin(x)\,(\cos x)^2$; $(\mathbf{0,5pt})$ $b.)f(x) = \frac{4x^3+5x^2+3}{x^2}$. $(\mathbf{0,5}\boldsymbol{pt})$

4. Déterminer la primitive F de la fonction f sur I vérifiant la condition indiquée. ($\mathbf{2} \times \mathbf{0,5}\boldsymbol{pt} = \mathbf{1}\boldsymbol{pt}$)
   $a.)\ f(x) = x^3 + x^2 - 1\ ,I = \mathbb{R}\ et\ \ F(0) = 7;$ b.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2},\ I =]0; +\infty], F(1) = 0$

EXERCICICE N°2 : Situation complexe ($\mathbf{2}\boldsymbol{points}$)

Tu travailles dans une société de fabrication d'un produit cosmétique. Cette société fabrique chaque jour $x\ produits\ avec\ x \in [0\,; 40]$. Le cout total production, exprimé en milliers de francs, est donné par :

$C(x) = x^2 - 60x$. Chaque produit fabriqué est vendu au prix unitaire de $2000f$.Toute la production est vendu le même jour. Pour plus d'efficacité, l'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal mais doit déterminer la quantité de produits cosmétiques à vendre pour un bénéfice maximum.

Elle te sollicite à cet effet. Donne une solution aux préoccupations de l'entreprise.

$\boldsymbol{Rappel}$: $\mathbf{Bénéficie} = \mathbf{Prix\ de\ Vente} - \mathbf{Cout\ de\ production}$

PROBLEME :($\mathbf{10}\boldsymbol{points}$)

PARTIE A : On considere la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Etudier et dresser le tableau de variation de g. $(\mathbf{0,5pt})$
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. $(\mathbf{0,25pt})$
3. Vérifier que $\alpha \in]2; 3[\ puis\ donner\ le\ signe\ de\ g.$ $(\mathbf{0,5pt})$

PARTIE B : Soit $f\ la\ fonction$ définie par : $\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}\ \ si\ \ \ x \geq 0} \\ \boldsymbol{f(x) = -x - 3 - \sqrt{x^2 - 2x}\ \ \ si\ x < 0} \end{cases}$

On donne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de $f\ puis\ calculer\ \ les\ limites\ aux\ \ bornes\ de\ D_f$.
   $\mathbf{0,5}\boldsymbol{pt} + \mathbf{4} \times \mathbf{0,25}\boldsymbol{pt}\ = \mathbf{1,5pt})$

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats. $(\mathbf{2 \times 0,5 + 0,5 = 1,5pt})$
3. Etudier les branches infinies de $\left(C_f\right)$. $(\mathbf{2 \times 0,25pt = 0,5pt})$
4. a. Montrer que $\forall\ x \geq 0\ et\ x \neq 1, f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$. $(\mathbf{0,5pt})$

   b. Calculer $f'(x)\ pour\ x < 0$. $(\mathbf{0,5pt})$

   c. Préciser les variations de f. $(\mathbf{0,5pt})$

   d. Dresser le tableau de variation complet de f. $(\mathbf{1pt})$
5. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha$. $(\mathbf{0,25pt})$
6. Construire $\left(C_f\right)$ dans le repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.(unité 1cm). $(\mathbf{1pt})$

PARTIE C: Soit h la restriction de a l'intervalle $I =]-\infty; 0[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $I\ sur\ un\ intervalle\ J$ à préciser. $(\mathbf{0,25pt})$
2. Préciser le sens de variation de h^{-1} sa bijection réciproque $(\mathbf{0,25pt})$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x) = -1 - 2\sqrt{2}$. $(\mathbf{0,25pt})$
4. Calculer $(h^{-1})'(-1 - 2\sqrt{2})$. $(\mathbf{0,25pt})$
5. Tracer $(C_{h^{-1}}$) courbe h^{-1} dans le même repère. $(\mathbf{0,5pt})$